Fiche n°1 sur la dérivation et l'intégration

Table des matières

1. Dérivation 2
1.1. Dérivées simples 2
1.2. Produit et quotient de fonctions 2
1.3. Fonctions composées 2
1.4. Notations de Leibniz et de Newton 3
1.5. Exercices 3
2. Intégration 4
2.1. Primitives simples 4
2.2. Quelques astuces 4
2.2.1. Produit ou quotient d'une fonction avec sa dérivée 4
2.2.2. Fonctions trigonométriques 4
2.3. Exercices 5
3. Correction des exercices 5
3.1. Dérivation 5

1. Dérivation

1.1. Dérivées simples

$f(x)$	$f'(x)$
x^n avec $n \in \mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2 x$ ou $\frac{1}{\cos^2 x}$

> *Remarque : les dérivées des fonctions $\sqrt{x}$ ou $\frac{1}{x}$ sont des cas particuliers de la dérivation de x^n. L'utilisation du résultat ci-dessus permet d'obtenir les classiques résultats (à connaître également) :*

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

1.2. Produit et quotient de fonctions

Pour la dérivée d'un produit de deux fonctions :

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Pour la dérivée d'un quotient :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

> *Remarque : il peut s'avérer tentant de dériver un quotient comme le produit $f \cdot \frac{1}{g}$. Cette méthode n'est pas recommandée car elle nécessite de recourir à la dérivation de la fonction composée $\frac{1}{g}$. Comme on cherche souvent à annuler la dérivée, le calcul du numérateur $f' \cdot g - f \cdot g'$ s'avère souvent amplement suffisant.*

1.3. Fonctions composées

La formule de dérivation d'une fonction composée est :

$$\left(f\big(g(x)\big)\right)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Elle est applicable simplement :

$f(x)$	$f'(x)$
e^{ax}	$a \cdot e^{ax}$
$\ln(ax)$	$\frac{a}{x}$
$\cos(kx)$	$-k \cdot \sin(kx)$
$\sin(kx)$	$\mathrm{k} \cdot \cos(kx)$
$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

1.4. Notations de Leibniz et de Newton

Il est courant, en physique, de manipuler des expressions littérales comportant plusieurs grandeurs. Pour préciser explicitement la grandeur par rapport à laquelle on dérive, on utilise usuellement la **notation de Leibniz** dans laquelle on écrit $\frac{df}{dx}$ à la place de $f'(x)$.

Avec cette notation, la dérivée n-ième s'écrit $\frac{d^n f}{dx^n}$ à la place de $f^{(n)}(x)$.

> *Remarque : l'intérêt de cette notation est de donner simplement la dimension de la dérivée* n*-ième d'une dérivée. Par exemple :*

- $\left[\frac{df}{dx}\right] = [\mathrm{f}] \cdot \mathrm{L}^{-1}$,
- $\left[\frac{d^2\mathrm{f}}{\mathrm{dt}^2}\right] = [\mathrm{f}] \cdot \mathrm{T}^{-2}$.

Enfin, dans le cas des dérivations par rapport au temps, on peut utiliser la **notation de Newton** dans laquelle chaque ordre de dérivation est représenté par un point au-dessus de la fonction :

- $\dot{f}(t)$ pour la dérivée temporelle première,
- $\ddot{f}(t)$ pour la dérivée temporelle seconde.

1.5. Exercices

Exercice 1 : Dériver les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 3x^4$$
$$f_2(x) = \frac{1}{x^7}$$
$$f_3(x) = \frac{1}{(x+4)^6}$$
$$f_4(x) = \sqrt{3+4x^2}$$
$$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{2+4x^3}}$$
$$f_6(x) = \frac{2+x^2}{3+7x^2}$$
$$f_7(x) = \ln\left(\frac{x-3}{2}\right)$$
$$f_8(x) = 3\cos^2 x \sin x$$
$$f_9(x) = \frac{\tan x}{1+\tan x}$$

Exercice 2 : Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la dérivée de la fonction

$$D(x) = \sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$$

s'annule, où Q est une constante strictement positive. On distinguera plusieurs cas en fonction de la valeur de Q.

2. Intégration

2.1. Primitives simples

Les primitives usuelles sont :

$f(x)$	$F(x)$
x^n avec $n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a}$
$\cos(kx)$	$\frac{1}{k}\sin(kx)$
$\sin(kx)$	$-\frac{1}{\mathrm{k}}\cos(kx)$

Remarque : ces primitives sont valables à une constante près. En physique, on utilisera les conditions initiales et/ou les conditions aux limites pour déterminer l'expression de la constante d'intégration.

2.2. Quelques astuces

2.2.1. Produit ou quotient d'une fonction avec sa dérivée

- Si on reconnaît une fonction de la forme :

$$g(x) = f(x) \cdot f'(x)$$

Alors, une primitive $G(x)$ de $g(x)$ est la fonction :

$$G(x) = \frac{1}{2} f^2(x)$$

Remarque : une méthode similaire est utilisable dans le cas où $g(x) = f^n(x) \cdot f'(x)$ *avec* $n \neq -1$.

- De même, si on reconnaît une fonction de la forme :

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Alors, une primitive $G(x)$ de $g(x)$ est la fonction :

$$G(x) = \ln(|f(x)|)$$

2.2.2. Fonctions trigonométriques

- Dans le cas d'une fonction trigonométrique élevée à la puissance n, il est nécessaire de linéariser la fonction pour trouver simplement une primitive.

  Par exemple : $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

- Si possible, on essaiera de faire apparaître des produits de la forme $\cos^n(x)\sin(x)$ ou $\sin^n(x)\cos(x)$ pour se ramener aux astuces ci-dessus.

2.3. Exercices

Exercice 1 : Donner une primitive pour les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 3x^4$$
$$f_{2(x)} = \frac{1}{x^7}$$
$$f_3(x) = \frac{2x}{4+7x^2}$$
$$f_4(x) = \frac{3x^2}{7+4x^3}$$
$$f_5(x) = 7\cos x \sin^4 x$$

Exercice 2 : Donner la primitive de $u(t) = u_0 e^{-t/\tau}$ qui s'annule en $t = 0$.

Exercice 3 : Une force conservative unidirectionnelle est reliée à son énergie potentielle par la relation :

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\overrightarrow{u_x}$$

Déterminer les énergies potentielles associées aux forces $\vec{F} = -mg\overrightarrow{u_x}$, $\vec{F} = -kx\overrightarrow{u_x}$ et $\vec{F} = -\frac{K}{x^2}\overrightarrow{u_x}$

Exercice 4 : Trouver la primitive de $\tan(x)$ qui s'annule en $x = 0$.

Exercice 5 : Trouver la primitive de $\cos^3(x)$ qui s'annule en $x = 0$.

Exercice 6 : Calculer la valeur moyenne de la fonction $\cos^2\theta$ définie par :

$$M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta$$

3. Correction des exercices

3.1. Dérivation

Exercice 1 : $f_1'(x) = 12\,x^3$, $f_2'(x) = -\frac{7}{x^8}$, $f_3'(x) = -\frac{6}{(x+4)^7}$, $f_4'(x) = \frac{4x}{\sqrt{3+4x^2}}$, $f_5'(x) = -\frac{6x^2}{(2+4x^3)^{\frac{3}{2}}}$, $f_6'(x) = \frac{2x}{3+7x^2} - 14x\frac{(2+x^2)}{(3+7x^2)^2}$, $f_7'(x) = \frac{1}{x-3}$, $f_8'(x) = 3(\cos^3 x - 2\cos x\sin^2 x)$, $f_9'(x) = \frac{\tan^2 x+1}{\tan x+1} - \frac{\tan x(1+\tan^2 x)}{(1+\tan x)^2}$

Exercice 2 : La dérivée de D est :

$$\frac{dD}{dx} = \frac{x}{2D}\left(-4 + 4x^2 + \frac{2}{Q^2}\right)$$

La première annulation évidente est obtenue pour $x = 0$. La seconde annulation vérifie :

$$x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Et n'existe que si $Q^2 > \frac{1}{2}$

3.2. Intégration

Exercice 1 : $F_1(x) = \frac{3}{5}x^5$, $F_2(x) = -\frac{1}{6x^6}$, $F_3(x) = \frac{1}{7}\ln(4+7x^2)$, $F_4(x) = \frac{1}{4}\ln(7+4x^3)$, $F_5(x) = \frac{7}{5}\sin^5 x$

Exercice 2 : $U(t) = u_0\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

Exercice 3 : $E_p = mgx, E_p = \frac{1}{2}kx^2, E_p = -\frac{K}{x}$

Exercice 4 : $F(x) = -\ln(|\cos x|)$

Exercice 5 : Pour faciliter l'intégration, on peut mettre la fonction sous la forme $f(x) = (1-\sin^2 x)\cos x$.

On trouve ensuite : $F(x) = \sin x\left(1 - \frac{1}{3}\sin^2 x\right)$

Exercice 6 : $M = \frac{1}{2}$